

Simulation numérique de la fusion à l'intérieur d'un cylindre adiabatique chauffé par le bas

M. PRUD'HOMME, T. HUNG NGUYEN et Y. K. WU

Département de Génie Mécanique, École Polytechnique de Montréal,
C.P. 6079 A, Montréal H3C 3A7, Québec, Canada

(Reçu le 22 juin 1990 et sous forme finale le 9 novembre 1990)

Résumé—On étudie ici la fusion à l'intérieur d'une enceinte cylindrique verticale d'un matériau à changement de phase porté à la température de fusion. Le problème est traité pour un chauffage par le bas à température constante, en supposant une paroi cylindrique adiabatique et des propriétés thermodynamiques constantes. On simule numériquement l'écoulement thermoconvectif dans la cavité formée par la phase liquide à l'aide d'une technique de génération d'un maillage adapté à la géométrie. Le nombre de Rayleigh critique pour l'apparition des cellules de Bénard est de 2197 en se basant sur l'épaisseur de la couche liquide. On passe progressivement d'un régime multicellulaire à un régime unicellulaire, durant lequel se forme une couche limite thermique au bas du cylindre qui tend à s'opposer au passage de la chaleur à travers la cavité. Le nombre de Nusselt au bas de la cavité subit durant ce temps une évolution marquée et fortement tributaire de la configuration cellulaire pour finir par se stabiliser à un niveau d'autant plus élevé qu'on se rapproche de l'axe de symétrie.

1. INTRODUCTION

ON ASSISTE depuis quelques années à une recrudescence d'activité en recherche appliquée sur le phénomène du changement de phase d'un matériau. Des besoins industriels nouveaux, qui sont apparus avec l'émergence des nouvelles technologies, particulièrement dans le domaine des énergies douces, ou encore la nécessité d'adapter des techniques plus classiques aux exigences de la haute technologie, ont donné beaucoup de vitalité à ce sujet d'étude. On compte ainsi de nombreux travaux sur le changement de phase à l'intérieur ou autour d'une enceinte cylindrique chauffée par la périphérie. Parmi les études expérimentales, mentionnons les contributions de Bareiss et Beer [1] pour la fusion autour d'un cylindre vertical isotherme, et encore celles de Sparrow *et al.* [2] pour la solidification cette fois, qui ont mis en évidence les effets non négligeables de la convection naturelle dans la phase liquide ou d'un refroidissement préalable du matériau sur l'évolution du processus.

La fusion autour d'un cylindre isotherme horizontal a fait l'objet des travaux de Goldstein et Ramsey [3] puis de Sparrow *et al.* [4] qui ont montré que le changement de phase s'avère sensible encore une fois au refroidissement initial de la matrice solide, ainsi qu'aux perturbations des conditions initiales. En ce qui concerne les études à caractère numérique, on peut citer Wu *et al.* [5], Sparrow *et al.* [6] pour la fusion autour d'un cylindre vertical, de même que Rieger *et al.* [7] pour la fusion autour d'un cylindre horizontal cette fois.

Une tendance générale se dégage aussi bien des résultats expérimentaux que des résultats numériques : la fusion s'accompagne toujours d'un écoulement de convection naturelle dans la phase liquide, quel que

soit le nombre de Rayleigh. Les premières cellules apparaissent avec la phase liquide. La raison en est que dans tous les problèmes précédents, les conditions limites sont telles qu'il existe au départ un gradient de température horizontal dans la cavité formée par le liquide qui initie la convection naturelle. On reconnaît toutefois que le transfert de chaleur est tout d'abord dominé par la conduction dans la phase liquide et que l'interface liquide-solide progresse uniformément bien que la convection soit présente. C'est le régime conductif initial, auquel succède rapidement un régime mixte où l'interface commence à se déformer. La convection naturelle devient ensuite le principal mécanisme de transfert de chaleur et des couches limites peuvent se former qui s'opposent au passage de la chaleur à travers la cavité, ce qui se traduit par un ralentissement de la fusion. C'est le régime convectif final, caractérisé par une déformation prononcée de l'interface.

Toutefois la fusion à l'intérieur d'un cylindre vertical chauffé par le bas présente une différence fondamentale par rapport au chauffage par la périphérie, en ceci qu'on observe maintenant un seuil critique pour l'existence de la convection, identifiable par un nombre de Rayleigh minimal en-dessous duquel on ne détecte aucun écoulement dans la cavité. On se propose donc de traiter ce cas qui constitue un problème de Bénard couplé avec un problème de changement de phase. Le problème de Bénard entre deux plans horizontaux, désormais classique, fait encore l'objet de travaux de recherche. Le nombre de Rayleigh critique pour l'apparition des cellules de Bénard entre les deux plans a pu être établi à 1720. Mais le problème de Bénard dans un milieu en changement de phase n'a reçu que très peu d'attention à ce

NOMENCLATURE

a^{ij}	composantes du tenseur métrique contravariant ($a^{11} = \xi_x^2 + \eta_y^2$; $a^{12} = \xi_x \xi_y + \eta_x \eta_y$; $a^{22} = \xi_y^2 + \eta_x^2$)	x, y	coordonnées adimensionnelles
c	chaleur massique [$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$]	z	coordonnée [m].
C, D	coefficient et terme source de l'équation aux différences finies	Symboles grecs	
f	fonction scalaire	α	diffusivité thermique [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$]
g	accélération de la gravité [m s^{-2}]	β	coefficient de dilatation volumique [K^{-1}]
J	jacobien, $x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta$	δ	épaisseur de la couche liquide [m]
k	conductivité thermique [$\text{J s}^{-1} \text{m}^{-1} \text{K}^{-1}$]	ε	nombre de Stefan, $c(T_w - T_f)/l$
l	chaleur latente de fusion [J kg^{-1}]	η	coordonnée transformée
n	direction normale à l'interface liquide- solide	θ	température adimensionnelle
\hat{n}	vecteur unitaire selon la normale, (n_x, n_y)	ν	viscosité cinématique [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$]
Nu	nombre de Nusselt local	ζ	coordonnée transformée
p	pression dynamique [Pa]	ρ	masse volumique [kg m^{-3}]
P, Q	termes source pour la transformation de coordonnées	τ	temps adimensionnel
Pr	nombre de Prandtl, ν/α	ϕ, φ	paramètres
r	coordonnée [m]	ψ	fonction courant [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$]
R	position de l'interface liquide-solide	ω	vorticité [s^{-1}].
Ra	nombre de Rayleigh, $\beta(T_w - T_f)r_0^3 g/\nu\alpha$	Indices et exposants	
Ra_i	nombre de Rayleigh interne, $\beta(T_w - T_f)\delta^3 g/\nu\alpha$	f	valeur à l'interface liquide-solide
t	temps [s]	i, j	entiers
T	température [$^\circ\text{C}$]	w	valeur à la paroi
u	vecteur vitesse, (u, v) [m s^{-1}]	*	valeur à l'itération précédente.
U^1, U^2	composantes du vecteur vitesse contravariant	Autres symboles	
		∇	gradient
		$\nabla \cdot$	divergence
		∇^2	laplacien plan ou axisymétrique
		$\hat{\nabla}^2$	laplacien axisymétrique transformé.

jour. Tien et Yen [8] ont étudié la fusion par le bas d'un solide de dimension infinie. Ils ont pu déterminer un seuil critique à $Ra = 1720$ à partir d'une analyse de stabilité unidimensionnelle, ce qui implique que la fusion n'affecte pas le seuil, à tout le moins dans ce cas précis. Les données expérimentales de Boger et Westwater [9] sur la convection et le changement de phase entre deux plans parallèles horizontaux sont venus corroborer l'analyse de Tien et Yen. On a pu constater que l'instabilité se manifeste pour des nombres de Rayleigh supérieurs à 1700 et que l'écoulement se met à osciller lorsque Ra excède 10^5 .

Yen [10] a effectué des mesures sur la fonte de la glace par le bas. Pour le système eau-glace, le nombre de Rayleigh critique n'est pas unique comme pour un fluide ordinaire, mais dépend de la température de chauffage à cause du phénomène d'inversion de densité de l'eau à 4°C . Seki *et al.* [11] ont obtenu des résultats similaires pour la fonte par le haut cette fois. Sparrow *et al.* [12] ont également procédé à une analyse de stabilité linéaire de l'écoulement durant la fusion entre deux plans, pour un fluide ordinaire avec chauffage par le bas, mais pour un coefficient de transfert de chaleur imposé. Ils ont conclu que le seuil cri-

tique dépend largement du nombre de Biot du problème. Pour les grands nombres de Biot, le nombre de Rayleigh critique tend vers 1720 comme pour un chauffage à une température uniforme.

Le problème qui nous concerne ici exige la solution simultanée des équations couplées de Navier-Stokes, de l'énergie et de la propagation de l'interface liquide-solide. Or, ni la position ni même la forme de ce dernier lorsqu'on dépasse le seuil critique ne sont connus a priori. Aussi la plupart des solutions numériques des problèmes de fusion ou solidification font-elles appel à des techniques d'immobilisation de l'interface pour simuler les équations. On retiendra ici la procédure de génération numérique d'un maillage adapté à la géométrie du problème employée avec succès par Wu *et al.* pour simuler la fusion autour d'un cylindre vertical. La technique en question permet de bien contrôler le maillage généré dans le plan physique tout en gardant un maillage rectangulaire uniforme dans le plan transformé.

On se propose donc dans le cadre de cette étude d'appliquer la méthode de génération de maillage au problème représenté à la Fig. 1. Une enceinte cylindrique circulaire verticale de rayon r_0 dont la paroi

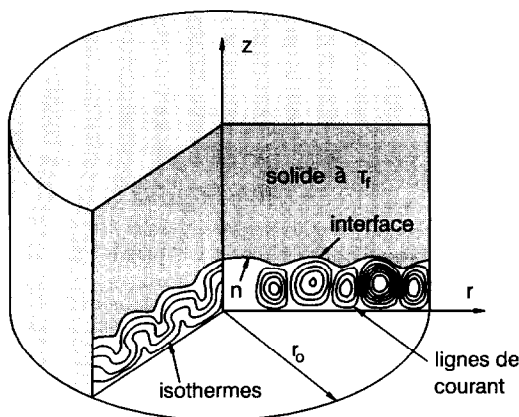


FIG. 1. Géométrie et système de coordonnées.

est adiabatique contient un matériau solide à la température de fusion. La fusion débute à l'instant $t = 0$ alors qu'on porte le bas du cylindre à une température constante T_w au-dessus du point de fusion T_f du matériau en question.

2. FORMULATION DU PROBLÈME

Le domaine de l'écoulement est représenté schématiquement à la Fig. 1. Pour les besoins de l'analyse, on suppose que la phase liquide est un fluide incompressible, de propriétés thermodynamiques constantes et qui satisfait aux conditions de l'approximation de Boussinesq. Si on néglige l'échauffement visqueux, le système d'équations à résoudre pour déterminer l'écoulement se ramène à

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho_f} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \left(\frac{\rho}{\rho_f} - 1 \right) \quad (2)$$

$$T_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \alpha \nabla^2 T. \quad (3)$$

On peut faire ici l'approximation linéaire habituelle

$$\frac{\rho}{\rho_f} = 1 - \beta(T - T_f) \quad (4)$$

qu'on porte ensuite dans (2) afin d'éliminer ρ . Les conditions limites à vérifier sur les frontières du domaine sont le glissement nul pour le champ de vitesse et

$$T_r = 0; \quad r = r_0 \quad (5a)$$

$$T = T_f; \quad z = z_f(r) \quad (5b)$$

$$T = T_w; \quad z = 0 \quad (5c)$$

pour le champ de température. Pour ces conditions, le problème possède une symétrie axiale et l'écoulement est bidimensionnel. On peut alors ramener le système (1)–(3) à un système d'équations scalaires. Il suffit pour cela d'éliminer le gradient de pression en prenant le rotationnel de (2), pour obtenir à l'aide de

(1) une équation de transport pour la vorticité ω

$$\omega_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega - \frac{u\omega}{r} = \nu \left(\nabla^2 \omega - \frac{\omega}{r^2} \right) + g\beta T_r \quad (6)$$

où par définition

$$\omega = v_r - u_z. \quad (7)$$

Les composantes du vecteur vitesse et la vorticité elle-même peuvent s'exprimer en termes d'une fonction de courant ψ au moyen de

$$u = \frac{1}{r} \psi_z \quad (8a)$$

$$v = -\frac{1}{r} \psi_r \quad (8b)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{2}{r} \psi_r - r\omega \quad (8c)$$

de sorte que l'équation (1) est toujours automatiquement vérifiée. Il est cependant préférable de traiter le problème sous forme adimensionnelle en définissant de nouvelles variables à cet effet, soit

$$(x, y)' = (r, z)/r_0, \quad (u, v)' = (u, v)r_0/\alpha, \quad \tau = \varepsilon \alpha t / r_0^2$$

$$\omega' = r_0^2 \omega / \alpha, \quad \psi' = \psi / \alpha r_0, \quad \theta = (T - T_f) / (T_w - T_f).$$

(9)

Les équations (3), (6) et (8c) retransformées s'écrivent, en omettant dorénavant les symboles primes afin d'alléger la notation

$$\varepsilon \theta_\tau + u \theta_x + v \theta_y = \nabla^2 \theta \quad (10)$$

$$\varepsilon \omega_x + u \omega_x + v \omega_y - \frac{u\omega}{x} = Pr \left(\nabla^2 \omega - \frac{\omega}{x^2} \right) + Pr Ra \theta_x \quad (11)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{2}{x} \psi_x - x\omega. \quad (12)$$

L'équation (11) met bien en évidence le rôle du gradient de température horizontal dans l'activation du mécanisme de la convection naturelle. Ce gradient a pour effet d'initier l'écoulement en créant un déséquilibre mécanique dans la masse de fluide initialement au repos. Sans la présence du terme source proportionnel à $Pr Ra$, la vorticité demeurerait nulle tout au long du processus de fusion et il n'y aurait pas de convection.

Ni la position ni la forme de l'interface liquide–solide ne sont connues a priori. Néanmoins leur évolution obéit à une relation simple basée sur un bilan d'énergie thermique à l'interface. En supposant qu'il n'y a pas de variation de la masse volumique du matériau lors du changement de phase, le bilan en question donne

$$\rho / \mathbf{R}_f = -k T_n \hat{\mathbf{n}} \quad (13)$$

pour la vitesse de déplacement locale de l'interface.

Sous forme adimensionnelle cette relation peut se décomposer en

$$x_\tau = -\theta_n n_x \tag{14a}$$

$$y_\tau = -\theta_n n_y \tag{14b}$$

qu'il suffit d'intégrer par rapport au temps pour déterminer la position et la configuration de l'interface à un moment donné.

3. MÉTHODE DE SOLUTION

3.1. Technique de maillage adapté

La simulation numérique de l'écoulement fait appel à une technique de génération d'un maillage adapté à la géométrie du problème, basée sur la méthode générale de transformation de coordonnées de Thompson *et al.* [13] qui permet de bien contrôler la répartition des noeuds dans le domaine de calcul et d'obtenir un maillage orthogonal aux frontières. La transformation s'effectue via la solution numérique de deux équations de type elliptique. En outre, comme la répartition des noeuds doit suivre la déformation progressive du domaine de l'écoulement, un nouveau maillage est généré à chaque pas de calcul dans le temps.

La méthode repose sur l'idée que les coordonnées d'un point dans le plan (ξ, η) sont reliées à ses coordonnées images dans le plan (x, y) par des équations de Poisson

$$\nabla^2 \xi = \xi_{xx} + \xi_{yy} = P \tag{15a}$$

$$\nabla^2 \eta = \eta_{xx} + \eta_{yy} = Q \tag{15b}$$

où P et Q sont des termes sources visant à contrôler l'espacement des noeuds du maillage. Ces équations peuvent également s'exprimer en utilisant ξ et η comme variables indépendantes. Les règles habituelles de transformation des dérivées permettent de passer d'un système de coordonnées à l'autre, mais on peut se simplifier considérablement la tâche en utilisant quelques résultats du calcul tensoriel qui sont valables dans n'importe quel système. Ainsi, pour une fonction scalaire f , le laplacien dans le plan est donné par

$$\begin{aligned} \nabla^2 f = \frac{1}{J} (Ja^{11} f_{\xi\xi})_{\xi} &= (a^{11} f_{\xi\xi})_{\xi} + 2a^{12} f_{\xi\eta} + a^{22} f_{\eta\eta} \\ &+ \frac{1}{J} [(Ja^{11})_{\xi} + (Ja^{12})_{\eta}] f_{\xi} \\ &+ \frac{1}{J} [(Ja^{12})_{\xi} + (Ja^{22})_{\eta}] f_{\eta}. \end{aligned} \tag{16}$$

Dans le cas qui nous occupe, $f = \xi$ ou η et l'équation (15) transformée se ramène à

$$(Ja^{11})_{\xi} + (Ja^{12})_{\eta} = JP \tag{17a}$$

$$(Ja^{12})_{\xi} + (Ja^{22})_{\eta} = JQ. \tag{17b}$$

En développant les expressions ci-dessus, on obtient après quelques manipulations simples le système

$$\begin{aligned} (a^{11} \partial_{\xi\xi}^2 + 2a^{12} \partial_{\xi\eta}^2 + a^{22} \partial_{\eta\eta}^2) \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \\ = (-P \partial_{\xi} - Q \partial_{\eta}) \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{18}$$

dont la solution donne les coordonnées images (x_{ij}, y_{ij}) d'un noeud (ξ_i, η_j) pour les conditions limites spécifiées au préalable sur le contour du rectangle de la Fig. 2. Ces conditions ne sont rien d'autre que les coordonnées de points quelconques sur la frontière dans le plan (x, y) qu'on assigne comme images aux noeuds situés sur le contour du rectangle.

Pour un domaine simplement connexe, il est possible d'avoir recours à une simplification proposée par Thomas et Middlecoff [14] qui permet d'obtenir un maillage orthogonal aux frontières sans trop de difficulté. On définit pour cela deux paramètres ϕ et φ auxquels on assigne une valeur à l'intérieur du rectangle, tel qu'indiqué par Wu *et al.* [5], à partir de la distribution des noeuds aux frontières, qui est choisie à priori.

On pose alors

$$P = \phi(\xi, \eta) a^{11} \tag{19}$$

$$Q = \varphi(\xi, \eta) a^{22} \tag{20}$$

qu'on porte dans l'équation (18) pour obtenir

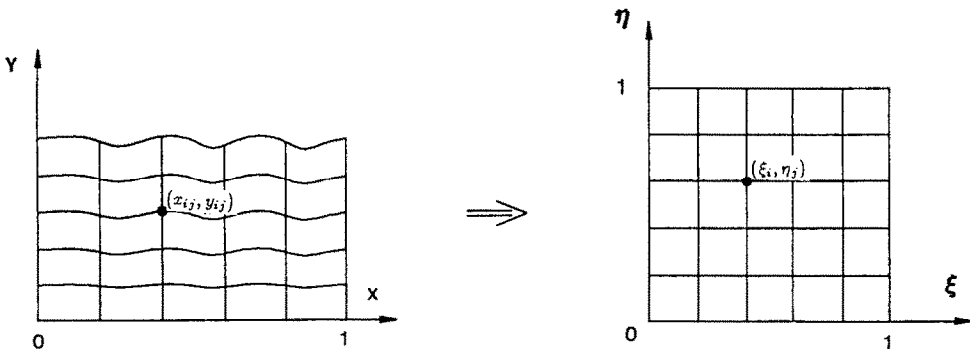


FIG. 2. Transformation des coordonnées.

$$[a^{11}(\partial_{\xi\xi}^2 + \phi \partial_\xi) + 2a^{12} \partial_{\xi\eta}^2 + a^{22}(\partial_{\eta\eta}^2 + \varphi \partial_\eta)] \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (21)$$

Ce dernier peut ensuite être résolu par différences finies pour générer le maillage curviligne non-orthogonal (sauf aux frontières) du plan (x, y) à partir du maillage rectangulaire uniforme du plan (ξ, η) .

3.2. Transformation des équations

La transformation a pour effet d’immobiliser l’interface à $\eta = 1$ dans le nouveau système de coordonnées, ce qui permet de traiter le problème dans le domaine fixe $0 < \xi < 1, 0 < \eta < 1$ tout au long du processus de fusion. Le passage du système (x, y) au système (ξ, η) s’effectue en posant $x = x(\xi, \eta, \tau)$ et $y = y(\xi, \eta, \tau)$ dans les équations (10)–(12). On établit ainsi la règle de correspondance

$$f_x(x, y, \tau) = f_\xi \xi_x + f_\eta \eta_x, \quad (22)$$

$$f_y(x, y, \tau) = f_\xi \xi_y + f_\eta \eta_y, \quad (23)$$

$$f_\tau(x, y, \tau) = f_\tau + f_\xi \xi_\tau + f_\eta \eta_\tau \quad (24)$$

pour les dérivées premières d’une fonction scalaire f où les membres de droite sont donnés en fonction des nouvelles variables (ξ, η, τ) . Mentionnons au passage que l’approximation quasi-stationnaire faite par [6] et qui consiste à négliger les deux derniers termes du membre de droite de (24) ne prête pas beaucoup à conséquence pour de faibles nombres de Stefan, comme on a pu le vérifier [5].

Pour les termes d’advection, les règles du calcul tensoriel établissent que

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) f = U^1 f_\xi + U^2 f_\eta. \quad (25)$$

Les composantes U^1, U^2 du vecteur vitesse contravariant dans le système (ξ, η) sont données par

$$U^1 = u \xi_x + v \xi_y, \quad (26)$$

$$U^2 = u \eta_x + v \eta_y. \quad (27)$$

Pour les termes de diffusion, on remarque que le laplacien axisymétrique qui apparaît dans les équations (10)–(12) ne diffère du laplacien plan des équations (15a) et (15b) que par la présence d’une dérivée première en x . Compte tenu des équations (16), (17), (19), (20) et (22) on obtient pour le laplacien du problème axisymétrique, en changeant de symbole afin d’éviter toute confusion avec le cas plan

$$\hat{\nabla}^2 f = a^{11}(f_{\xi\xi} + \phi f_\xi) + 2a^{12} f_{\xi\eta} + a^{22}(f_{\eta\eta} + \varphi f_\eta) + \frac{1}{x}(f_\xi \xi_x + f_\eta \eta_x). \quad (28)$$

Les relations ci-dessus permettent de reformuler sans peine le système original (10)–(12) en termes des nouvelles variables, ce qui donne finalement

$$\varepsilon \frac{D\omega}{D\tau} + U^1 \omega_\xi + U^2 \omega_\eta = Pr \left(\hat{\nabla}^2 \omega - \frac{\omega}{x^2} \right) + \frac{\omega}{x^2} (\psi_\xi \xi_x + \psi_\eta \eta_x) + Pr Ra (\theta_\xi \xi_x + \theta_\eta \eta_x) \quad (29)$$

$$\varepsilon \frac{D\theta}{D\tau} + U^1 \theta_\xi + U^2 \theta_\eta = \hat{\nabla}^2 \theta \quad (30)$$

$$\hat{\nabla}^2 \psi = \frac{2}{x} (\psi_\xi \xi_x + \psi_\eta \eta_x) - x\omega \quad (31)$$

où

$$\frac{D}{D\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \xi_\tau \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_\tau \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (32)$$

$$U^1 = \frac{1}{xJ} \psi_\eta \quad (33a)$$

$$U^2 = -\frac{1}{xJ} \psi_\xi. \quad (33b)$$

On voit que le nombre de Stefan n’apparaît que devant les dérivées par rapport au temps. Par conséquent, la solution du problème dans la cavité est à chaque instant la solution permanente dans une cavité fixe identique, pourvu que le nombre de Stefan soit suffisamment petit.

Pour ce qui est des conditions limites, la transformation s’effectue de façon identique. Compte tenu de la symétrie axiale du problème, la fonction courant doit vérifier la condition

$$\psi = 0; \quad \xi = 0, 1, \quad \eta = 0, 1. \quad (34)$$

La condition de glissement nul aux parois entraîne que $\psi_\xi = \psi_\eta = 0$ localement, ce qui permet de déduire de l’équation (31) les conditions limites

$$\omega = -\frac{a^{22}}{x} \psi_{\eta\eta}; \quad \eta = 0, 1 \quad (35a)$$

$$\omega = -\frac{a^{11}}{x} \psi_{\xi\xi}; \quad \xi = 1 \quad (35b)$$

pour la vorticité. Les conditions (5a)–(5c) deviennent, compte tenu de l’orthogonalité locale du système de coordonnées

$$\theta_\xi = 0; \quad \xi = 0, 1 \quad (36a)$$

$$\theta = 0; \quad \eta = A \quad (36b)$$

$$\theta = 1; \quad \eta = 0. \quad (36c)$$

On a également que

$$\omega = 0; \quad \eta = 0 \quad (37)$$

  cause de la symétrie de l’écoulement. Il reste encore à transformer les équations (14a) et (14b) qui deviennent

$$x_t = -\theta_\eta \eta_x \quad (38a)$$

$$y_t = -\theta_\eta \eta_y. \quad (38b)$$

L’intégration de (38a) et (38b) permet en principe

de déterminer la position et la forme de l'interface liquide-solide à l'instant $\tau + \Delta\tau$ à partir de la position des noeuds à l'instant τ . Cependant les noeuds ont tendance avec le temps soit à converger vers un point, soit encore à diverger. Il faut alors procéder à une redistribution locale des noeuds le long de l'interface avant de générer un nouveau maillage. La redistribution, basée sur une interpolation par splines cubiques, permet alors d'éviter une trop grande distorsion et assure une meilleure répartition des noeuds.

3.3. *Solution par différences finies*

La simulation numérique de l'écoulement est basée sur la solution par différences finies du système d'équations transformées dans le plan (ξ, η) . Le travail de discrétisation est simplifié au maximum par l'uniformité du maillage de la Fig. 2. Le système d'équations à résoudre est discrétisé de manière implicite dans le temps selon le schéma des différences arrière du premier ordre. Les termes d'advection des équations (29) pour la vorticité et (30) pour la température sont discrétisés, eux, selon un schéma upwind du second ordre dans le but d'assurer la stabilité numérique des calculs. Tous les autres termes du système impliquant des dérivées sont discrétisés selon le schéma classique des différences centrales pour un maillage uniforme.

On obtient ainsi un système d'équations aux différences finies à résoudre sur ordinateur. Chaque équation du système peut, si on regroupe les termes, disons à j constant, se mettre sous forme pentadiagonale en i . On a donc pour une variable f quelconque le système

$$(Cf)_{i-2,j} + (Cf)_{i-1,j} + (Cf)_{i,j} + (Cf)_{i+1,j} + (Cf)_{i+2,j} = D_{ij} \quad (39)$$

à résoudre pour les valeurs nodales f_{ij} de la variable, où on a préalablement rassemblé dans le terme source D_{ij} tous les termes faisant intervenir les autres noeuds. L'algorithme de solution retenu pour résoudre le système est basé sur l'approche quasi-statique qui consiste à solutionner ensemble les équations pour ω, θ, ψ à chaque pas de calcul dans le temps, puis à calculer seulement ensuite la nouvelle position de l'interface. On génère ainsi à chaque fois un nouveau maillage et celui-ci est gardé en mémoire pour calculer les termes ξ_i et η_i à l'étape suivante.

On débute les calculs à $\tau = 0$ avec un champ nul pour toutes les variables à l'exception de θ_{ij} qui vaut 1 à $\eta = 0$ et 0 ailleurs. On effectue les calculs dans l'ordre qui suit :

- (1) Génération numérique du maillage adapté.
- (2) Calcul des coefficients a'' et de $\eta_x, \xi_x, \eta_y, \xi_y, J, \xi_\tau, \eta_\tau$.
- (3) Solution de l'équation de la vorticité ω_{ij} .
- (4) Solution de l'équation de la fonction de courant ψ_{ij} .
- (5) Calcul des composantes du champ de vitesse U_{ij}^1 et U_{ij}^2 .
- (6) Solution de l'équation de la température θ_{ij} .

(7) Vérification de la convergence des équations d'après le critère

$$\left| \frac{f_{ij} - f_{ij}^*}{f_{ij}^*} \right| < 10^{-4}$$

(8) Si le critère n'est pas satisfait, retour à l'étape 3, en changeant la direction du balayage : tantôt selon i , tantôt selon j , etc.

(9) Stockage en mémoire des champs x, y, ω, θ .

(10) Calcul de la nouvelle position de l'interface et redistribution des noeuds.

(11) Retour à l'étape 1 pour le prochain pas de calcul dans le temps.

Les calculs ont été effectués pour un maillage de 21 noeuds selon ξ par 31 noeuds selon η sur un ordinateur IBM 4831. Pour un cas typique, le pas de calcul $\Delta\tau$ était de 0,001. Il faut alors compter de 40 à 45 itérations par étape en moyenne pour obtenir une solution convergée. Le temps de calcul est de 2000 secondes de CPU environ pour 280 pas de calcul dans le temps.

4. RÉSULTATS

4.1. *Régime conductif*

Du moment qu'un matériau se trouve initialement à la température de fusion, comme c'est le cas ici, il ne peut y avoir de conduction de chaleur dans la phase solide lorsque la fusion débute. L'analyse subséquente peut par conséquent se limiter à la seule phase liquide, qui apparaît instantanément à $\tau = 0$, alors qu'on porte la face inférieure du cylindre à la température $\theta = 1$.

Pour les besoins de cette étude, on introduit le nombre de Rayleigh interne

$$Ra_i = \frac{g\beta\delta^3(T_w - T_f)}{\alpha\nu} \quad (40)$$

basé sur l'épaisseur δ de la couche liquide, afin d'établir le seuil critique pour l'apparition de la convection d'après les mêmes échelles que dans le cas du problème de Bénard classique. Il existe par ailleurs entre les deux nombres de Rayleigh la relation de proportionnalité

$$Ra_i = \left(\frac{\delta}{r_0}\right)^3 Ra \quad (41)$$

basée sur le rapport de forme instantané δ/r_0 de la cavité formée par l'accumulation de liquide au bas du cylindre.

Comme on l'a déjà mentionné, les résultats antérieurs des travaux de Wu *et al.* [5], Sparrow *et al.* [6], ainsi que Rieger *et al.* [7] sur des problèmes de changement de phase similaires ont démontré que les grands paramètres de l'écoulement et du transfert de chaleur sont à toute fin utile indépendants des nombres de Stefan et de Prandtl, pourvu que $\varepsilon < 0,15$ et que $Pr > 7$. Par conséquent, les résultats présentés

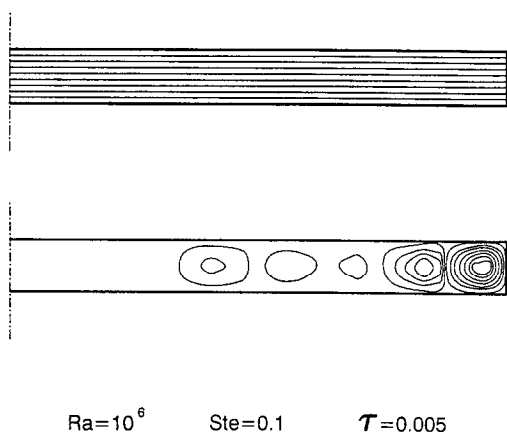


FIG. 3. Isothermes et lignes de courant : $Ra = 10^6$, $\varepsilon = 0,1$, $\tau = 0,005$.

dans cette section ont tous été calculés pour $\varepsilon = 0,1$ et $Pr = 7$.

Au début, lorsqu'apparaît la phase liquide, le transfert de chaleur à travers la cavité se fait par conduction uniquement. Le flux de chaleur est uniforme et l'interface liquide-solide demeure droite et parallèle au bas du cylindre. Les isothermes sont également des lignes droites, comme on peut le vérifier sur la Fig. 3. On ne détecte aucun écoulement dans la cavité remplie de liquide, hormis un très faible résidu de l'ordre de 10^{-8} sans signification physique, imputable à la précision finie des opérations arithmétiques effectuées sur l'ordinateur. Les couches de fluide adjacentes à l'interface, plus froides et plus denses, se trouvent situées au-dessus des couches plus chaudes et plus légères du bas de la cavité. Il s'agit là d'une stratification potentiellement instable, ce qui représente l'essentiel du problème classique de Bénard. Dans un premier temps, tant que le gradient de température dans la cavité demeure purement vertical, le terme source de l'équation (11) est nul et il n'y a pas d'écoulement.

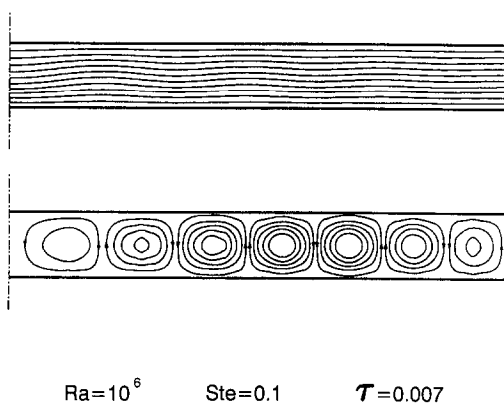


FIG. 4. Isothermes et lignes de courant : $Ra = 10^6$, $\varepsilon = 0,1$, $\tau = 0,007$.

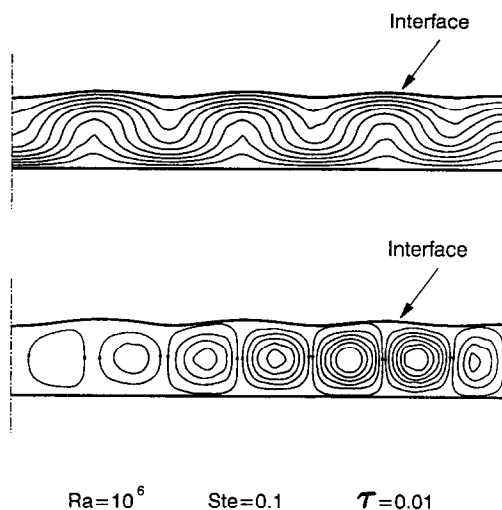


FIG. 5. Isothermes et lignes de courant : $Ra = 10^6$, $\varepsilon = 0,1$, $\tau = 0,010$.

Toutefois, à mesure que l'interface progresse, le nombre de Rayleigh interne augmente avec l'épaisseur de la couche liquide. La stratification devient instable lorsque Ra_i atteint le seuil critique pour le régime de conduction pure sans écoulement, de sorte que la moindre perturbation mécanique ou thermique s'amplifie et initie la convection en rompant l'équilibre thermique horizontal. Le bruit de fond numérique mentionné plus haut suffit alors à déclencher l'écoulement et les premières cellules apparaissent, comme on peut le voir sur la Fig. 4. On constate que l'écoulement a pour effet de déformer les isothermes, mais l'interface demeure droite encore un moment, avant de commencer à se déformer lui aussi sous l'effet de la non uniformité du flux thermique consécutive à l'apparition des cellules. Les calculs, effectués pour un nombre de Rayleigh $Ra = 10^6$, indiquent que l'in-

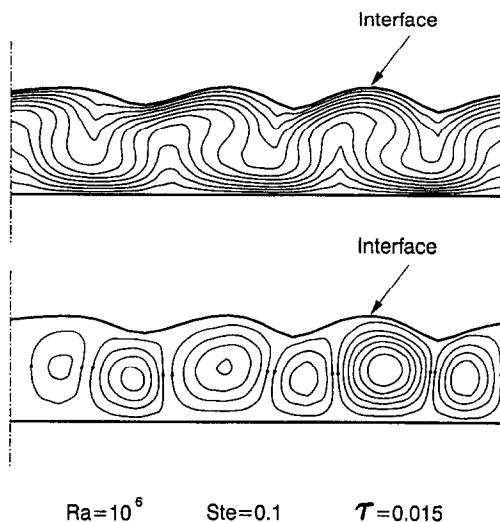


FIG. 6. Isothermes et lignes de courant : $Ra = 10^6$, $\varepsilon = 0,1$, $\tau = 0,015$.

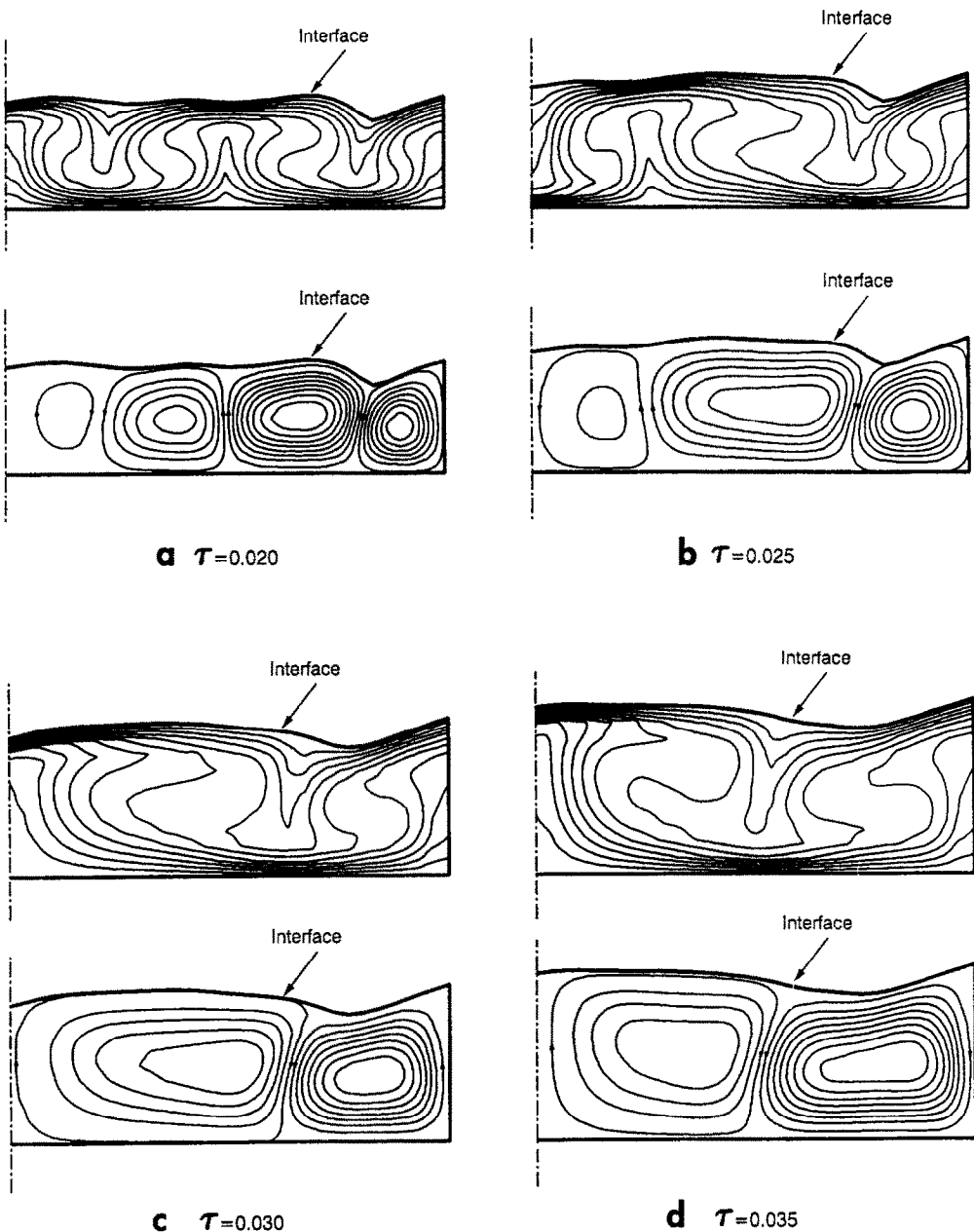


FIG. 7. Isothermes et lignes de courant : $Ra = 10^6$, $\varepsilon = 0.1$.

stabilité se produit pour un rapport de forme de cavité δ/r_0 de 0,13, ce qui correspond à un nombre de Rayleigh interne de 2197.

4.2. Régime convectif

La Fig. 5 montre un début de distortion de l'interface au temps $\tau = 0,01$. On dénombre dans la cavité 7 cellules de Bénard dont le sens de rotation alterne de l'une à l'autre. On remarque que la fusion se produit le plus rapidement là où l'écoulement vertical du bas vers le haut de la cavité est le plus intense. Ceci est dû au fait que la rotation des cellules de convection force le fluide à absorber de la chaleur en longeant le bas

de l'enceinte avant de remonter pour la céder ensuite à l'interface. Cette circulation favorisant le transfert de chaleur fait que la fusion s'accélère et l'interface devient localement convexe. Inversement, un segment concave de l'interface délimite une région de la cavité où l'écoulement ralentit la fusion en forçant le fluide froid à redescendre ; ceci diminue le gradient de température à l'interface et réduit d'autant la vitesse de propagation de ce dernier.

La cellule adjacente à l'axe $x = 0$ présente les plus faibles vitesses d'écoulement, car les contraintes de symétrie du problème font en sorte que la vitesse radiale du fluide doit être nulle sur l'axe en question.

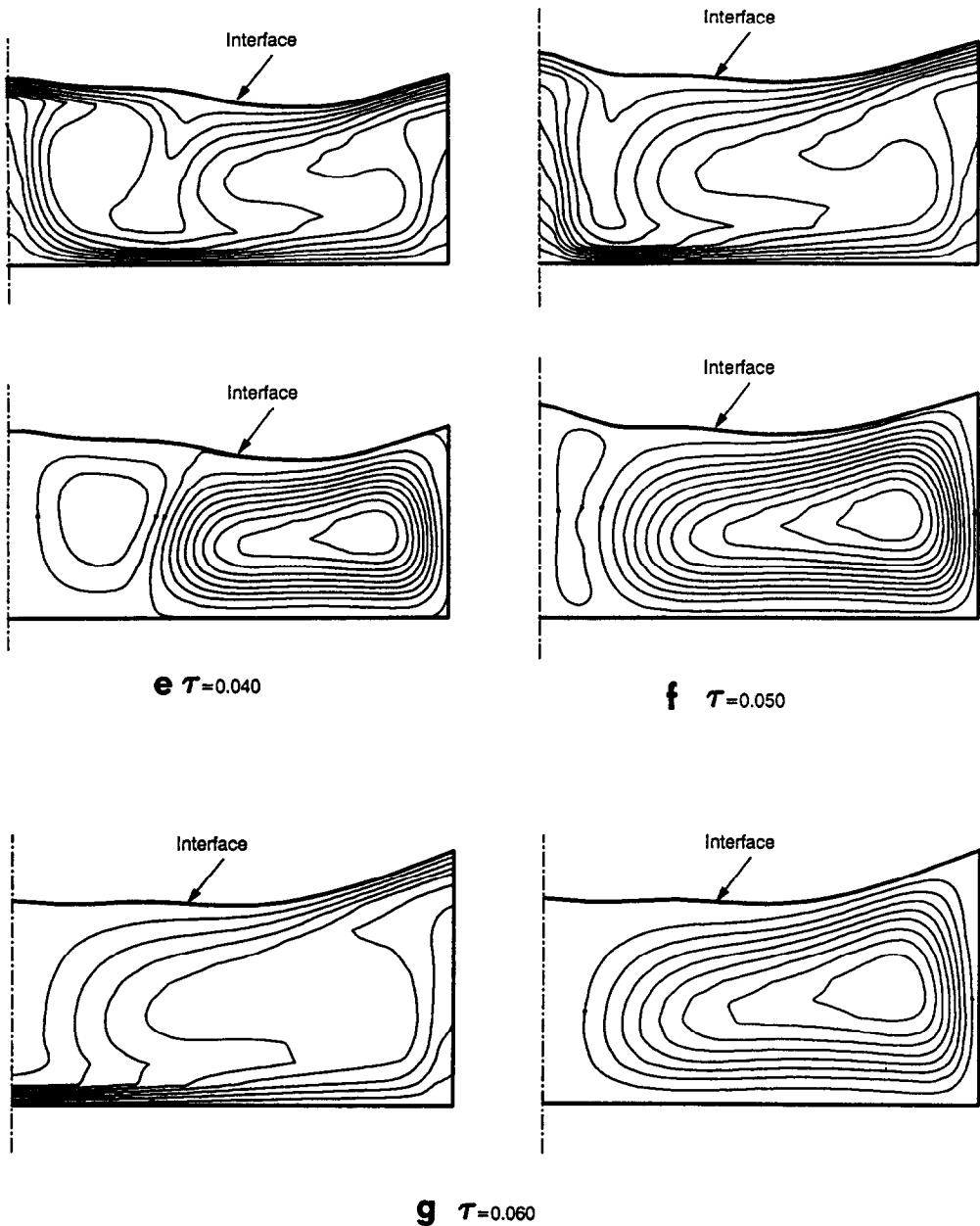


FIG. 7. (Continued.)

Par ailleurs, à mesure que le temps passe, les autres cellules de l'écoulement gagnent en intensité et occupent un espace relatif de la cavité de plus en plus important au détriment de la cellule de gauche, jusqu'à l'éliminer complètement, comme on peut le voir sur la Fig. 6 pour $\tau = 0,015$ où le nombre de cellules est passé de 7 à 6. Qui plus est, la première cellule de gauche sur la Fig. 6 indique un sens de rotation contraire à celui de la Fig. 5, ce qui montre bien la façon dont les cellules se déplacent vers l'axe de symétrie à mesure que l'écoulement se développe. Ce processus de disparition des cellules plus faibles au profit des cellules plus intenses se poursuit jusqu'à ce qu'il ne

reste plus qu'une seule cellule. Ainsi, à la Fig. 7, on passe d'un écoulement quadricellulaire à $\tau = 0,02$ à un écoulement unicellulaire à $\tau = 0,06$. Le défilement des cellules le long de la cavité vers l'axe de symétrie, favorisant pour un observateur fixe le transfert de chaleur tantôt vers le haut, tantôt vers le bas, fait que la distortion de l'interface tend à s'amenuiser durant un certain temps à partir de $\tau = 0,02$, pour reprendre de plus belle lorsqu'on en arrive à un régime essentiellement unicellulaire à partir de $\tau = 0,05$. Ce dernier est caractérisé par la présence d'une mince couche limite thermique au bas de la cavité et qui tend à s'opposer au passage de la chaleur vers l'interface, à

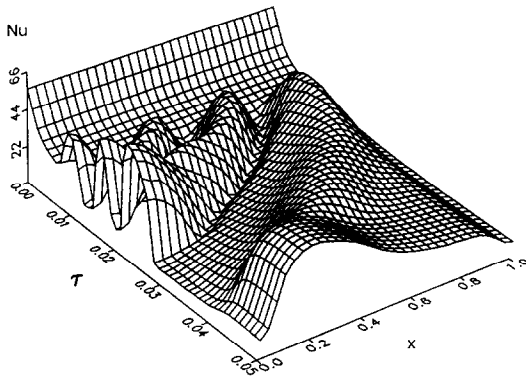


FIG. 8. Nombre de Nusselt local : $Ra = 10^6$, $\varepsilon = 0,1$.

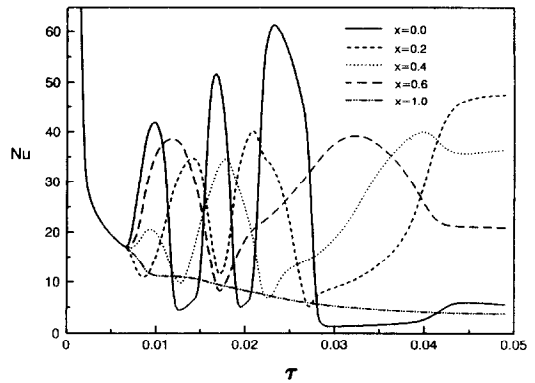


FIG. 10. Nombre de Nusselt en fonction du rayon : $Ra = 10^6$, $\varepsilon = 0,1$.

l'instar de ce qu'on a pu observer [5, 6] dans d'autres situations où il n'y a pas de seuil critique. On remarque sur la Fig. 7 que la fusion se fait dès lors plus rapidement au voisinage de la paroi verticale de l'enceinte, là où précisément la couche limite est moins visible.

Le nombre de Nusselt local au bas du cylindre subit naturellement une évolution importante durant ce temps, représentée à la Fig. 8. En régime conductif, le nombre de Nusselt est uniforme à la grandeur de l'interface et décroît rapidement. Ce comportement est typique de tous les problèmes de changement de phase dominés par la conduction, tel que rapporté par [5, 6]. La transition abrupte du régime conductif au régime convectif lorsqu'on atteint le seuil critique est nettement visible sur le graphique.

L'évolution dans le temps du nombre de Nusselt local reflète fidèlement celle de l'écoulement. Le nombre augmente ou diminue selon que la direction de l'écoulement en un point favorise ou non le transfert de chaleur au bas du cylindre. La Fig. 9 représente l'évolution en fonction du temps du nombre de Nusselt pour certaines valeurs du rayon. Les courbes décroissent de façon monotone en régime conductif. A $x = 1$, la décroissance demeure également monotone ou presque en régime convectif. Mais lorsque le seuil critique est atteint, pour $\tau = 0,007$ environ, des

oscillations se manifestent ailleurs en raison du défilement des Cellules de Bénard. A mesure que l'on se rapproche de l'axe de symétrie, la fréquence et l'amplitude des oscillations augmentent. Pour les grandes valeurs de τ , les oscillations s'estompent, ce qui correspond au régime unicellulaire stable. On remarque alors que le Nu local se stabilise à un niveau d'autant plus élevé qu'on se rapproche de l'axe de symétrie à cause de la présence de la couche limite, tandis qu'on assiste au phénomène inverse au voisinage de la paroi verticale.

La Fig. 10 confirme que le profil radial du nombre de Nusselt à un instant donné est étroitement relié à la configuration cellulaire dans la cavité. Ainsi, les minima et maxima de Nu coïncident de très près au début avec les zones d'écoulement vers le haut et vers le bas les plus intenses, respectivement. La concordance devient moins nette toutefois à mesure que se forme la couche limite thermique, qui exerce une influence de plus en plus déterminante sur le transfert de chaleur pendant que s'installe le régime unicellulaire.

Sur la Fig. 11, le nombre de Nusselt moyen au bas de la cavité permet d'apprécier l'évolution du transfert de chaleur de façon globale cette fois. La transition lorsqu'on atteint le nombre de Rayleigh critique est très apparente. On distingue aussi clairement le

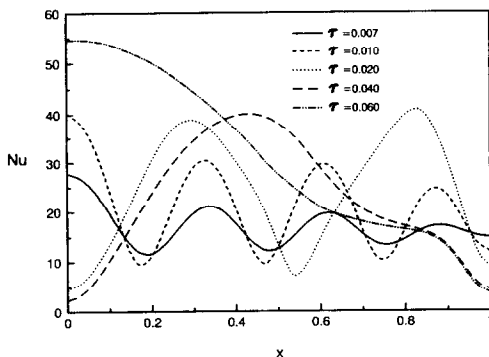


FIG. 9. Nombre de Nusselt en fonction du temps : $Ra = 10^6$, $\varepsilon = 0,1$.

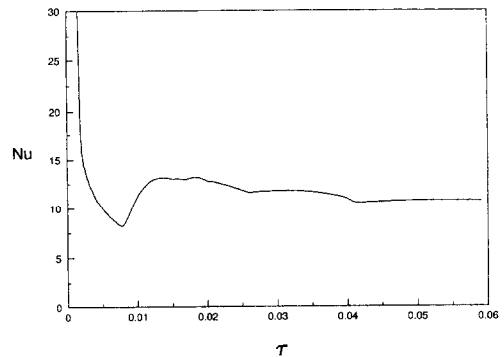


FIG. 11. Nombre de Nusselt moyen en fonction du temps : $Ra = 10^6$, $\varepsilon = 0,1$.

maximum relatif durant le régime multicellulaire alors que la couche limite thermique n'exerce pas encore d'influence significative sur le transfert de chaleur, puis la stabilisation en régime unicellulaire à partir de $\tau = 0,045$ environ à mesure que se forme la couche limite thermique, qui exerce une influence de plus en plus déterminante sur le transfert de chaleur pendant que s'installe le régime unicellulaire.

5. CONCLUSIONS

La technique de génération de maillage retenue pour traiter ce problème s'est révélée pleinement satisfaisante. Le nombre de Rayleigh critique pour l'apparition des cellules de Bénard a pu être établi à 2197 en se basant sur l'épaisseur de la couche liquide, ce qui correspond à un rapport de forme de la cavité de 0,13. On passe en convection d'un régime multicellulaire à un régime unicellulaire au cours duquel se forme une couche limite thermique au bas de la cavité, qui s'oppose au passage de la chaleur vers l'interface et fait en sorte que le nombre de Nusselt local finit par se stabiliser après avoir subi une évolution marquée durant la période de transition.

Remerciements—Ce travail a bénéficié des subventions de recherche du conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada CRSNG-A4982 et CRSNG-A626.

RÉFÉRENCES

1. M. Bareiss and H. Beer, Influence of natural convection on the melting process in a vertical cylindrical enclosure, *Lett. Heat Mass Transfer* **7**, 329–338 (1980).
2. E. M. Sparrow, J. W. Ramsey and R. G. Kemink, Freezing controlled by natural convection, *J. Heat Transfer* **101**, 578–584 (1979).
3. R. J. Goldstein and J. W. Ramsey, Heat transfer to a melting solid with application to thermal energy storage systems. In *Heat Transfer Studies: Festschrift for E.R.G. Eckert*, pp. 199–206. Hemisphere, New York (1979).
4. E. M. Sparrow, S. Ramadhyani and S. V. Patankar, Effects of subcooling on cylindrical melting, *J. Heat Transfer* **100**, 395–402 (1978).
5. Y. K. Wu, M. Prud'homme et T. Hung Nguyen, Etude numérique de la fusion autour d'un cylindre vertical soumis à deux types de conditions limites, *Int. J. Heat Mass Transfer* **32**, 1927–1938 (1989).
6. E. M. Sparrow, S. V. Patankar and S. Ramadhyani, Analysis of melting in the presence of natural convection in the melt region, *J. Heat Transfer* **99**, 520–526 (1977).
7. H. Rieger, U. Projahn and H. Beer, Analysis of the heat transport mechanisms during melting around a horizontal circular cylinder, *Int. J. Heat Mass Transfer* **25**, 137–147 (1982).
8. C. Tien and Y. C. Yen, Approximate solution of a melting problem with natural convection, *Chem. Engrng Prog. Symp. Series* **62**, 166 (1966).
9. D. V. Boger and J. W. Westwater, Effect of buoyancy on the melting and freezing process, *J. Heat Transfer* **89**, 81 (1967).
10. Y. C. Yen, Onset of convection in a layer of water formed by melting ice from below, *Physics Fluids* **11**, 1263–1270 (1968).
11. N. Seki, S. Fukusako and M. Sugawara, A criterion of onset of free convection in a horizontal melted water layer with free surface, *J. Heat Transfer* **99**, 92–98 (1977).
12. E. M. Sparrow, L. Lee and N. Shamsundar, Convective instability in a melt layer heated from below, *J. Heat Transfer* **98**, 88–94 (1976).
13. J. F. Thompson, F. C. Thames and C. W. Mastin, Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies, *J. Comp. Phys.* **15**, 299–319 (1974).
14. P. D. Thomas and J. F. Middlecoff, Direct control of the grid point distribution in meshes generated by elliptic equations, *AIAA J.* **18**(6), 652–656 (1980).

NUMERICAL SIMULATION OF MELTING INSIDE AN ADIABATIC CYLINDER HEATED FROM BELOW

Abstract—Melting within a vertical cylindrical enclosure heated at constant temperature from below is being studied numerically. The problem is examined for a phase change material of constant thermal properties initially at the fusion temperature, assuming adiabatic conditions at the vertical wall. Governing equations for the convective flow in the melt are solved using computer-generated, body-fitted curvilinear coordinates. The critical Rayleigh number for the onset of convection is 2197 based on the melt layer thickness. The initial multicellular convective flow pattern is ultimately replaced by single Bénard cell. During this transition, the Nusselt number at the bottom wall exhibits strong local variations, closely related to the evolution of the cell pattern. In the end, a thermal boundary layer is formed at the bottom of the cavity, which results in a monotonic decrease of the Nusselt number in the radial direction.

NUMERISCHE SIMULATION VON SCHMELZVORGÄNGEN IN EINEM ADIABATEN,
VON UNTEN BEHEIZTEN ZYLINDER

Zusammenfassung—Das Schmelzen in einem senkrechten zylindrischen, bei konstanter Temperatur von unten beheizten Hohlraum wird numerisch untersucht. Das Problem wird für ein Phasenwechselmaterial mit konstanten thermischen Eigenschaften bei der Schmelztemperatur betrachtet, wobei an der senkrechten Wand adiabate Bedingungen angenommen werden. Die grundlegenden Gleichungen für die Konvektionsströmung in der Schmelze werden unter Verwendung eines körperangepaßten, von einem Computer erzeugten Koordinatensystems gelöst. Die kritische Rayleigh-Zahl für das Einsetzen der Konvektion (gebildet mit der Schmelzschichtdicke) beträgt 2197. Die ursprüngliche, mehrzellige Konvektionsströmung geht in eine einzige Bénard-Zelle über. Während dieses Übergangs zeigt die Nusselt-Zahl im unteren Teil der Wand starke lokale Schwankungen, die eng mit der Entwicklung des Zellmusters zusammenhängen. Schließlich bildet sich eine thermische Grenzschicht am Boden des Hohlraums, woraus sich eine monotone Abnahme der Nusselt-Zahl in radialer Richtung ergibt.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАВЛЕНИЯ В НАГРЕВАЕМОМ СНИЗУ
АДИАБАТИЧЕСКОМ ЦИЛИНДРЕ

Аннотация—Численно исследуется процесс плавления в вертикальной цилиндрической полости, нагреваемой снизу при постоянной температуре. Задача рассматривается для материала с постоянными тепловыми свойствами, который претерпевает фазовый переход при температуре плавления, в предположении адиабатических условий у вертикальной стенки. Определяющие уравнения для конвективного течения в расплаве решаются с использованием строящихся при помощи компьютера криволинейных координат, связанных с телом. Критическое число Рэлея, основанное на толщине слоя расплава и соответствующее возникновению конвекции, составляет 2197. Начальная многоячейная структура конвективного течения сменяется единичной ячейкой Бенара. В процессе этого перехода число Нуссельта у нижней стенки обнаруживает существенные локальные изменения, тесно связанные с эволюцией ячейистой структуры. В конце процесса у основания полости образуется тепловой пограничный слой, что приводит к монотонному уменьшению числа Нуссельта в радиальном направлении.